المستوى:الثالثة علوم تجريبية **ماي 2022**

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات / المدة : 3 ساعات و نصف.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين 1 (4 ن)

المطلوب اختيار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة مبررا الاختيار.

		أ	ب	ج
1	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ تساوي :	1	e	$\frac{1}{e}$
2	احد حلول المعادلة التفاضلية $y''+4e^{-2x}=0$ هو الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$:	$y=-e^{-2x}$	$y=\frac{2}{e^{2x}}$	$y=\frac{-2}{e^{2x}}$
3	قسم يتكون من 18 تلميذا و 12 تلميذة نريد تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا و أمينا ، عدد اللجان بحيث يكون الرئيس ولدا و الأمين بنتا هو	6084	6048	4068
4	لتكن $f(x)=8x^3+1$ ، الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم من أجل $x=1$ معرفة بـ	$F(x)=x^4+1$	$F(x)=3x^4+1$	$F(x)=2x^4+x-3$

التمرين 2 (4 ن)

يحتوي صندوق U_1 على سبع كريات منها خمس حمراء مرقمة بـ 1 ، 1 ، 1 ، 0 ، 2 و كريتين خضراوين مرقمة بـ 1 ، 0 و يحتوي صندوق U_2 على سبع كريات منها ثلاث حمراء مرقمة بـ 2 ، 2 ، 1 و اربعة خضراء مرقمة بـ 2 ، 1 ، 0 ، 0 (الكريات لا نفرق بينها باللمس).

نرمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة اوجه مرقمة من 1 الى 6، بحيث اذا ظهر الرقمان 2 و 4 نسحب عشوائيا كريتين من الصندوق U_1 على التوالي دون ارجاع ،و في باقي الحالات

نسحب كريتين في آن واحد من الصندوق U_2 .

1) لتكن الحادثتين A و B حيث :

A " سحب كريتين من نفس اللون" .
B : "سحب كريتين من نفس الرقم "
أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

2) هل الحادثتين A و B مستقلتين ؟ علل.

3) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس الرقم ،ما هو احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1 .

4) نعيد التجربة حيث نسحب الآن من U_1 كرتين في آن واحد و نضعها في الصندوق U_2 ، ثم نسحب كرتين على التوالي دون ارجاع من U_2 .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب الكرات الحمراء المسحوبة.

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ج)أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين 3 (5 ن)

I)نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3}$

1) ارسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$

2) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 باستعمال الرسم السابق و دون حساب الحدود.

3) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

4) برهن بالتراجع أنه و من أجل كل عدد طبيعي n أن: $1\le u_n<4$

5) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

II) نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على$\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n=u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم .

1) عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0

- نضع $\alpha=-4$

أ) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

ب) تحقق من صحة تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n) .

ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+....+u_n$

التمرين 4 (7 ن)

I) g دالة عددية معرفة على المجال $]0\ ,\ +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1)أدرس تغيرات الدالة g.

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[1\ ;1.5]$

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\ ,\ +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2 + 1 - \ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود أطراف مجال تعريفها. ماذا تستنتج ؟.

2) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0\ ,\ +\infty[$ فإن: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ).

5) بيّن أن $f(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

6) أنشئ (C_f) و (Δ) .

7) أ) جد الدالة الأصلية للدالة : $x \mapsto (1 - \ln x)\dfrac{1}{x}$ و التي تنعدم من أجل $x = e$

ب) أحسب المساحة $S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x = \alpha\ ,\ x = 1\ ,\ y = x$ حيث α العدد المشار إليه في الجزء I

ج) تحقق أن: $S(\alpha) = \dfrac{\alpha^2(2 - \alpha^2)}{2}$

انتهى الموضوع الأول.

الموضوع الثاني

التمرين 1 (4 ن)

اجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات التالية:

1) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\ ,\ +\infty[$ كما يلي : $f(x)=2x+ln(\frac{x+1}{2x})$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=2x$.

2) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3x+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة زوجية.

3) للمعادلة $2\ ln(x)-ln(5x-6)=0$ حلان متمايزان هما 3 و 2.

4)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_n=-3\ (\frac{1}{4})^n$ هي متتالية متزايدة.

التمرين 2 (4 ن)

يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء ، إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 والأخريان تحملان الرقم 5 أما القريصات الحمراء فإثنتان منهما تحملان الرقم 2 و الأخريان تحملان الرقم 3 .

نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد .

نعتبر الحادثتين A وB حيث :

A " مجموع الرقمين المسحوبين أكبر تماما من 6 ".

B " الحصول على القريصتين بيضاوين ".

1) أحسب $P(A)$ و$P(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

2) ماهو احتمال أن يكون مجموع الرقمين المسحوبين أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاويتين ؟

3) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب قريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

أ)عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم أحسب الإنحراف المعياري σ (X) .

التمرين 3 (5 ن)

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$$

1) أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة ، و عين نهايتها.

2) أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}\ (u_n - 1)$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_{n+1} - 1 \leq (\frac{1}{2})^n$

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

ا) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

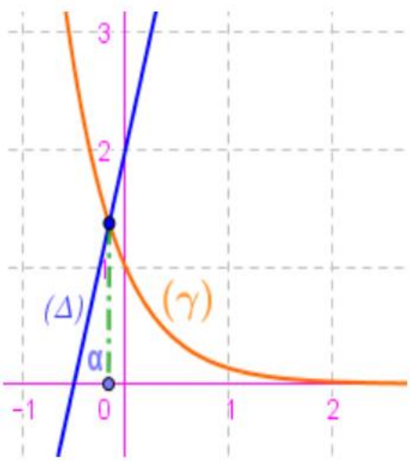
ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) احسب بدلالة n المجموع L_n حيث : $L_n = \frac{V_0 - 1}{u_0} + \frac{V_1 - 1}{u_1} + \dots + \frac{V_n - 1}{u_n}$

التمرين 4 (7 ن)

I) الشكل التالي هو التمثيل البياني (γ) للدالة $x \to e^{-2x}$
و المستقيم (Δ) ذو المعادلة

$y=4x+2$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).



الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) .

ثم استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) تحقق أن $-0.16 < \alpha < -0.15$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 3 -2\, xe^{2x}$

$\left(C_f\right)$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{2x}\, g(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ- أثبت أن المستقيم (d) الذي معادلته $y = x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) .

4) بين أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}$

5) ارسم (C_f) و (d) . (نأخذ $f(\alpha) = 3.07$)

6) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (d) يُطلب تعيين معادلته.

7) عين بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

أ) x عدد حقيقي ، باستعمال التكامل بالتجزئة احسب : $\int_0^x 2te^{2t}dt$

ب) λ عدد حقيقي اصغر تماما من 0 ، احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=0$ ، $x=\lambda$ و $y = x+3$

انتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق في شهادة البكالوريا ☺- أستـــــاذة المادة –

التصحيح النموذجي

الموضوع الأول

رقم التمرين	الحل	التنقيط
التمرين 1	**1)** $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ تساوي e: اذن **الجواب الصحيح هو ب)**	1 ن
	2) احد حلول المعادلة التفاضلية $y''+4e^{-2x}=0$ هو الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$: هو $y=-e^{-2x}$ اذن **الجواب الصحيح هو أ)**	1 ن
	3) قسم يتكون من 18 تلميذا و 12 تلميذة نريد تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا و أمينا ، عدد اللجان بحيث يكون الرئيس ولدا و الأمين بنتا هو 6048 اذن **الجواب الصحيح هو ب)**	1 ن
	4) لتكن $f(x)=8x^3+1$ ، الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم من أجل $x=1$ معرفة بـ $F(x)=2x^4+x-3$ اذن **الجواب الصحيح هو ج)**	1 ن

التمرين 2

ملاحظة : في هذة الحالة كل صندوق له إحتمال سحب حيث $P(U_1)=\frac{1}{3}$ و $P(U_2)=\frac{2}{3}$.

0.5 ن

عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوق U_1 هي : $A_7^2=42$ و من الصندوق U_2 هي : $C_7^2=21$.

❶ حساب إحتمالات الحوادث :

0.5 ن

$P(A)=29/63 \quad ; P(B)=17/63$

2) الحادثتين A و B غير مستقلتين لأن

0.5 ن

لدينا $P(A\cap B)=\frac{7}{63}$ و منه

$P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$

0.75 ن

3) علما أن الكريتيين المسحوبتين من نفس الرقم ،ما هو احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1 .

$P_B(U_1)=\frac{P(U_1\cap B)}{P(B)}=\frac{7}{17}$.

4)أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X .

قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0,1,2\}$.

0.75 ن

$P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_7^2}\times\frac{A_4^2}{A_9^2}+\frac{C_2^2}{C_7^2}\times\frac{A_6^2}{A_2^9}+\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}\times\frac{A_5^2}{A_9^2}=\boxed{\frac{175}{756}}$.

ب) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائيX

0.5 ن

$P(X=1)=\frac{C_5^2}{C_7^2}\times\frac{2\times A_4^1A_5^1}{A_9^2}+\frac{C_2^2}{C_7^2}\times\frac{2\times A_6^1A_3^1}{A_2^9}+\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}\times\frac{2\times A_4^1A_5^1}{A_9^2}=\boxed{\frac{418}{756}}$.

$p(X=2)=\frac{C_5^2}{C_7^2}\times\frac{A_5^2}{A_9^2}+\frac{C_2^2}{C_7^2}\times\frac{A_3^2}{A_2^9}+\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}\times\frac{A_4^2}{A_9^2}=\frac{163}{756}$.

0.75 ن

2	1	0	$X=x_i$
$\frac{163}{756}$	$\frac{418}{756}$	$\frac{175}{756}$	$P(X=x_i)$

ج) الأمل الرياضياتي $E(X)$

0.25 ن

$E(X)=\frac{744}{756}\cong 0.9$

التمرين 3	1) الرسم	0.5 ن
	2) تمثيل على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2	0.5 ن
	التخمين : يبدو أن (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 2	0.25 ن
	استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات : $1 \le u_n \le 4$	0.5 ن
	اتجاه التغير (u_n) : (u_n) متتالية متزايدة	0.5 ن
	(u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة	0.5 ن
	3) (v_n) هندسية من أجل $\alpha = -4$ $q = \frac{2}{3}$ و $v_0 = -3$	0.5 ن
	4) أ) $v_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $u_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4$	0.75 ن
	ب) $\lim_{n \to +\infty} u_n = 4$	0.5 ن
	جـ) $S_n = 9\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right] + 4(n+1)$	0.5 ن

التمرين	الإجابة	العلامة
التمرين 4	1) النهايات	0.5 ن
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	
	ب) $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ومنه $g'(x) > 0$ إذن هي دالة متزايدة تماما على المجال	0.25 ن
	$]0 , +\infty[$	0.25 ن
	جدول التغيرات	0.5 ن
	2) مبرهنة القيم المتوسطة	0.5 ن
	إشارة $g(x)$	
	سالبة على المجال $]0 ; \alpha[$ و موجبة على المجال $]\alpha ; +\infty[$	
	Ⅱ) 1) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$	0.5 ن
	إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$	0.25 ن
	f متناقصة على $]0;\alpha]$ و f متزايدة على $[\alpha;+\infty[$	
	2) النهايات	0.5 ن
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	
	جدول التغيرات	0.5 ن
	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$	0.5 ن
	(d) ذو المعادلة : $y = x$ مقارب لـ (c_f)	
	$f(x) - y = \frac{1 - \ln x}{x}$	
	(c_f) فوق (d) على $]0;e[$ و (c_f) تحت (d) على $]e;+\infty[$	0.5 ن
	$(c_f) \cap (d) = \{(e;e)\}$	
	4) إثبات أن : $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$ والحصر : $1 < f(\alpha) < \frac{7}{2}$	0.75 ن

	5) الرسم 	0.5 ن
	6) أ) الدالة الأصلية h : $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2-\frac{1}{2}$	0.5 ن
	ب) $S_{(\alpha)}=\int_1^{\alpha}[f(x)-x]dx=\frac{(2-\ln\alpha)\ln\alpha}{2}$	
	جـ) $\ln\alpha=2-\alpha^2$ و $S_{(\alpha)}=\frac{\alpha^2(2-\alpha^2)}{2}$	0.5 ن

الموضوع الثاني

التنقيط	الحل	رقم التمرين
1 ن 1 ن 1 ن 1 ن	1) الدالة f المعرفة على $]0\ ,\ +\infty[$ كما يلي : $f(x)=2x+ln(\frac{x+1}{2x})$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=2x$. خطأ 2) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3x+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة زوجية. خطأ بل دالة فردية 3) للمعادلة $2\ ln(x)-ln(5x-6)=0$ حلان متمايزان هما 3 و 2. **صحيح** 4)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_n=-3\ (\frac{1}{4})^n$ هي متتالية متزايدة **صحيح**	**التمرين 1**

التمرين 2

عدد الحالات الممكنة هي : $C_7^2 = 21$ — 0.5 ن

1) احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 هو : — 0.5 ن

$$P(A) = \frac{9}{21}$$

$$P(B) = \frac{3}{21}$$ — 0.5 ن

2) احتمال أن يكون المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين : — 0.75 ن

$$P(C) = \frac{1}{21}$$

3)ا) تعيين قيم المتغير العشوائي: $X = \{3,4,5,6,7,8,10\}$ — 0.5 ن

ب) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي : — 0.75 ن

$$P(X=3) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{21} = \frac{2}{21}$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^2 + C_1^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_2^1}{21} = \frac{3}{21}$$

$$P(X=5) = \frac{4}{21}$$

$$P(X=6) = \frac{3}{21}$$

$$P(X=7) = \frac{4}{21}$$

$$P(X=8) = \frac{4}{21}$$

$$P(X=10) = \frac{C_2^2}{21} = \frac{1}{21}$$

$X = x_i$	3	4	5	6	7	8	10	$\sum$
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	1

0.5 ن

ج) حساب الأمل الرياضي :

$$E(X) = \left(3 \times \frac{2}{21}\right) + \left(4 \times \frac{3}{21}\right) + \left(5 \times \frac{4}{21}\right) + \left(6 \times \frac{3}{21}\right) + \left(7 \times \frac{4}{21}\right) + \left(8 \times \frac{4}{21}\right) + \left(10 \times \frac{1}{21}\right) \cong 5.67$$

0.5 ن

حساب التباين والانحراف المعياري :

$V(X) = 7.18$

الانحراف المعياري

$\sigma(X) = \sqrt{v} = 2.68$

0.5 ن

التمرين 3

1) أ)

نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n > 1$

① من أجل $n = 0$: لدينا $u_0 = 2$ و $2 > 1$ إذن $u_0 > 1$

ومنه $p(0)$ صحيحة

② نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $u_n > 1$ ونبرهن على أن $p(n+1)$ صحيحة أي : $u_{n+1} > 1$

لدينا $u_n > 1$ ومنه $u_n + 2u_n > 1 + 2u_n$

وبالتالي $3u_n - 1 > 2u_n$ ومنه $\frac{3u_n - 1}{2u_n} > 1$

إذن $u_{n+1} > 1$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة

اذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

0.5 ن

ب)

ندرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-1}{2u_n}-u_n=\frac{-2u_n^2+3u_n-1}{2u_n}$$

$$=\frac{(-2u_n+1)(u_n-1)}{2u_n}$$

0.5 ن

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n>1$

ومنه $u_n-1>0........(1)$

و $-2u_n<-2$ ومنه $-2u_n+1<-1$ أي أن

$-2u_n+1<0........(2)$

وكذلك $2u_n>0........(3)$

من (1)و (2) و (3) نستنتج أن $\frac{(-2u_n+1)(u_n-1)}{2u_n}<0$

أي $u_{n+1}-u_n<0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

بماأن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل

بـ 1 فإن (u_n) متقاربة.

2) ا)

0.25 ن

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}(u_n-1)$

$$u_{n+1}-1=\frac{3u_n-1}{2u_n}-1=\frac{u_n-1}{2u_n}=\frac{1}{2u_n}(u_n-1)$$

ولدينا $u_n>1$ ومنه $2u_n>2$ إذن $\frac{1}{2u_n}<\frac{1}{2}$

بضرب الطرفين في العدد الموجب (u_n-1) نحصل على

$\frac{1}{2u_n}(u_n-1)<\frac{1}{2}(u_n-1)$ ومنه $u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}(u_n-1)$

0.75 ن

ب)

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 < u_{n+1} - 1 \le \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ومنه $0 < u_1 - 1 \le \frac{1}{2}(u_0 - 1)$

$0 < u_2 - 1 \le \frac{1}{2}(u_1 - 1)$

$0 < u_3 - 1 \le \frac{1}{2}(u_2 - 1)$ 0.5 ن

....

$0 < u_n - 1 \le \frac{1}{2}(u_{n-1} - 1)$

بضرب أطراف هذة المتباينات طرفا لطرف نجد :

$$0 < u_n - 1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 1)$$

وبماأن $u_0 - 1 = 1$ فإن $0 < u_n - 1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(**طريقة 2 :** يمكن إستعمال طريقة البرهان بالتراجع)

3)

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1} = \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{6u_n - 2 - 2u_n}$$

$$= \frac{u_n - 1}{4u_n - 2} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$

ب. كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

كتابة عبارة u_n بدلالة n :

لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ ومنه $2 v_n u_n - v_n = u_n - 1$ إذن 0.5 ن

$(2v_n - 1)u_n = v_n - 1$ ومنه $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$

إذن $$u_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{2\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}{2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}$$

0.5 ن

	جـ. حساب بدلالـة n المجموع L_n حيث : $L_n=\frac{v_0-1}{u_0}+\frac{v_1-1}{u_1}+\frac{v_2-1}{u_2}+........+\frac{v_n-1}{u_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n : لدينا $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$ ومنه $\frac{v_n-1}{u_n}=2v_n-1$ إذن $L_n=(2v_0-1)+(2v_1-1)+(2v_2-1)+........+(2v_n-1)$ $=2(v_0+v_1+......v_n)-(1+1+1......+1)$ $=2v_0\frac{1-q^n}{1-q}-(n+1)=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n-1$ $=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}-n$	0.5 ن
التمرين 4	1) بقراءة بيانية نحدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) . (γ) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty;\alpha[$ و تحت (Δ) على $]\alpha;+\infty[$ و (γ) يقطع (Δ) في النقطة A ذات الفاصلة α استنتاج اشارة $g(x)$ حسب قيم x . (جدول الإشارة أدناه) 2) التحقق أن $-0.16<\alpha<-0.15$	0.5 ن 0.5 ن 0.25 ن

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

لدينا: $g(-0.16)\cdot g(-0.15)=0.017\times(-0.05)<0$

ومنه $-0.16<\alpha<-0.15$.

1) حساب النهايات

0.75 ن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+3-2x\,e^{2x}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x}-2e^{2x}\right)=\boxed{-\infty}$$

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{2x}g(x)$ و استنتاج اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول التغيرات

$f'(x)=e^{2x}g(x)$ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

0.75 ن

$$f'(x)=1-2e^{2x}-4x\,e^{2x}=e^{2x}\left(e^{-2x}-4x-2\right)=\boxed{e^{2x}g(x)}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات

0.5 ن

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3) أ) أثبت أن المستقيم (d) الذي معادلته $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left(-2x\,e^{2x}\right)=0$ و منه المستقيم (D) ذو المعادلة

$y=x+3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

0.5 ن

الوضع النسبي

لدينا $\left[f(x)-(x+3)\right]=-2\,x\,e^{2x}$ و منه إشارة الفرق $\left[f(x)-(x+3)\right]$ هي عكس إشارة x إذن (C_f) يقع تحت (D) على المجال $]0;+\infty[$ و فوق (D) على المجال $]-\infty;0[$ و (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الإحداثيات $(0;3)$.

0.5 ن

4) نبين أن $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}$

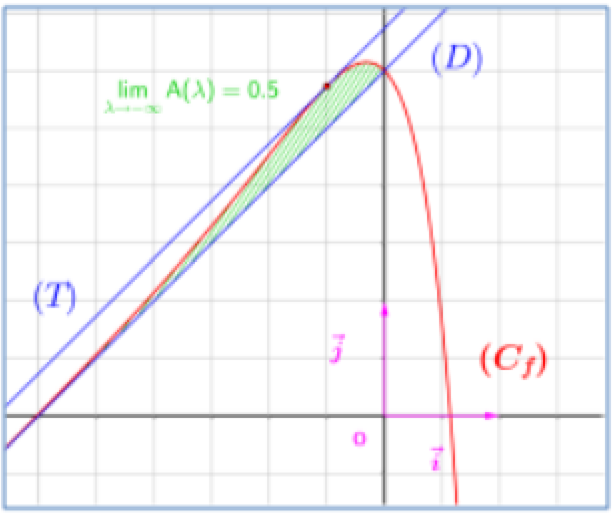
لدينا $g(\alpha)=0$ معناه: $e^{-2\alpha}-4\alpha-2=0$ أي: $e^{2\alpha}=\frac{1}{4\alpha+2}$ نعوض في عبارة f فنجد:

$$f(\alpha)=\alpha+3-2\,\alpha\times\frac{1}{4\alpha+2}$$

0.5 ن

$$=\alpha+3-\alpha\times\frac{1}{2\alpha+1}=\boxed{\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}}$$

5) رسم (C_f) و (d)



0.5 ن

6) نبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (d) يُطلب تعيين معادلته.

لدينا $f'(x)=1$ تكافئ $-2\ e^{2x}-4\,x\,e^{2x}=0$ أي أن

$-2e^{2x}(2x+1)=0$ ومنه $2x+1=0$ إذن $x=\frac{-1}{2}$.

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) عند النقطة

ذات الفاصلة $\frac{-1}{2}$ معادلته $y=x+3+\frac{1}{e}$. — 0.5 ن

7) تعيين بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين

يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا كان $3<m<3+\frac{1}{e}$ — 0.25 ن

أ) xعدد حقيقي ، باستعمال التكامل بالتجزئة

نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=2e^{2t}$

و منه $u'(t)=1$ ، $v(t)=e^{2t}$ إذن

$$\int_0^x 2te^{2t}dt=\left[u(t)v(t)\right]_0^x-\int_0^x u'(t)v(t)\,dt$$

$$=\left[te^{2t}\right]_0^x-\int_0^x e^{2t}\,dt=xe^{2x}-\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^x$$

$$=xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$$ — 0.5 ن

ب) λ عدد حقيقي اصغر تماما من 0 ، حساب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=0$ ، $x=\lambda$

	و $y = x + 3$ $$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{0}\left(f(x)-(x+3)\right)dx=\int_{0}^{\lambda}2xe^{2x}dx$$ $$=\left[xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\right]_{0}^{\lambda}=\left(\lambda e^{2\lambda}-\frac{1}{2}e^{2\lambda}+\frac{1}{2}\right)ua$$ **ومنه :** $$\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\left(\lambda e^{2\lambda}-\frac{1}{2}e^{2\lambda}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}ua$$	0.5 ن